Производная функции.

Определение: ***Производной функции f(x)*** в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx в этой точке при стремлении Δx к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

где $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$.

1. Производные некоторых функций:

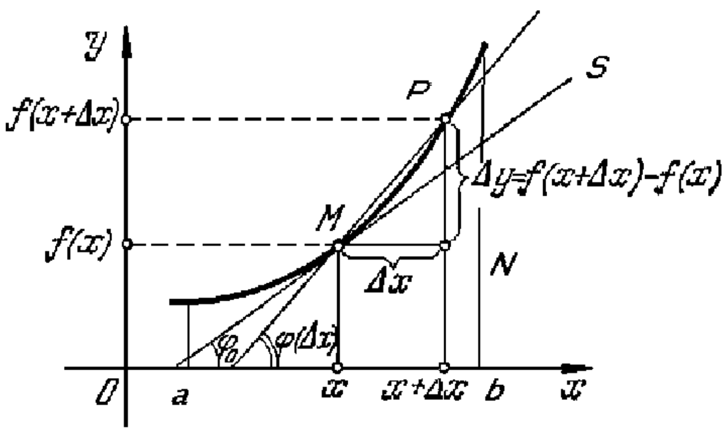
y	$y`$
C	0
x^{μ}	$\mu x^{\mu-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

2.

3. Свойства производных:

y	$y`$
$u \pm v$	$u` \pm v`$
uv	$u`v + v`u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u`v - v`u}{v^2}$
$f_1(u)$, если $u = f_2(x)$	$y`_u\, u`_x$

4. Общий смысл производной.



Геометрический смысл производной есть тангенс угла наклона касательной, проведенной к функции в данной точке.

Производную $f`(x_0)$ можно трактовать как скорость изменения переменной *Y* относительно переменной *X* в точке X_0.

В практических условиях и функция и аргумент могут иметь достаточно разнообразную природу:

Физика: зависимость *S(t)* $y` = v(t)$

объем V(t) – скорость изменения объема

P(t) – давление, T(t) – температура; - скорость нагревания.

Биология: p(t) – число особей в популяции в зависимости от времени t

p`(t) – скорость роста популяции.

Химия: x(t) – масса вещества в зависимости от времени t

x`(t) – скорость химической реакции и т.д.

5. Производная сложной функции.

Пусть задана функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ - такая функция называется сложной.

Правило: производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$, которая может быть представлена в виде, равна произведению производной функции $y = f(u)$ по промежуточной переменной (обозначается *y`u),* в которую подставлено значение $u = \varphi(x)$, и производной функции $u = \varphi(x)$ по независимой переменной *X (*обозначается *u`x).*

$$y` = y`_u u`_x$$

Пример:

$y = \sin(x^2 + 3)$ $u = x^2 + 3$

$y = \sin u$ $y`_u = \cos u$ $u`_x = 2x$

$y` = \cos u \times 2x = \cos(x^2 + 3) \times 2x$

6. Применение производной к исследованию функции на экстремум.

Некоторые утверждения:

- Если $f`(x) > 0$ в каждой точке некоторого интервала J, то функция $f(x)$ возрастает на J.
- Если $f`(x) < 0$ в каждой точке некоторого интервала J, то функция $f(x)$ убывает на J.

Точки, в которых $f`(x) = 0$ или не существует, называются **критическими**.

Критическими точками область определения разбивается на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак.

- Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ $f`(x)$ меняет знак с «+» на «-», то $x = x_0$ **- точка максимума.**
- Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ $f`(x)$ меняет знак с «-» на «+», то $x = x_0$ - **точка минимума.**

План исследования функции на экстремум.

1. Найти область определения функции $y = f(x)$
2. Найти производную функции $y` = f`(x)$
3. Решить уравнение $y` = 0$, найти критические точки функции. Отложить их на числовой оси.
4. Установить знак производной в интервалах слева и справа от каждой критической точки и записать промежутки возрастания и убывания функции.
5. Выяснить какие из критических точек являются точками max, а какие min.

Пример:

$$y = 2x^2 - x^4$$

1. D_y=R
2. y`=4x-4x^3
3. y`=0

   4x-4x^3=0

   4x × (1-x^2)=0

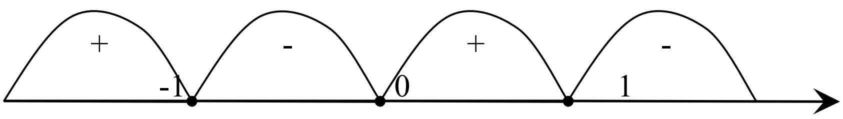
   4x × (1-x) × (1+x)=0

   x_1=0 x_2=1 x_3=-1

   f(0)=0 f(1)=1 f(-1)=1

4. f`(x)

   f(x)



5. X=-1 точка max

   X= 1 точка max

   X= 0 точка min

6. Дифференциал функции.
Применение к решению задач.

Определение: Дифференциалом функции называется произведение производной функции на приращение аргумента **dy=y`× dx**.

Приращение аргумента X считают равным dx - дифференциалу аргумента.

Алгоритм нахождения дифференциала функции.

1. Найти производную функции.
2. Найти приращение аргумента Δx ; $dx \approx \Delta x$; $\Delta x = x_2 - x_1$.
3. Подставить в формулу $dy = y` \times \Delta x$.
4. Вместо x подставляем значение x_1.
5. Вычисляем dy .

Пример:

$y = 4x^2 - 3x$ $\quad\quad x_1 = 3$ $\quad\quad x_2 = 3{,}01$

1. $y` = 8x - 3$
2. $\Delta x = x_2 - x_1 = 3{,}01 - 3 = 0{,}01$
3. $dy = (8x - 3) \times 0{,}01$
4. $dy = (8 \times 3 - 3) \times 0{,}01$
5. $dy = 0{,}21$

7. Функции многих аргументов. Частные производные. Полный дифференциал функции.

До этого мы рассматривали функцию одной переменной $y = f(x)$, но существуют ещё функции нескольких переменных $u = f(x, y, z)$

Например: $u = xy^2 + 3z$

- Если один из аргументов, например x изменяется от x_0 до x, а другие остаются неизменными, то приращение функции: $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$ называется **частным приращением по** x .

Аналогично по y, z .

Для функции нескольких переменных, вводится понятие частных производных по x u_x', по y u_y', по z u_z' или $\dfrac{du}{dx}; \dfrac{du}{dy}; \dfrac{du}{dz}$.

- Предел отношения частного приращения функции по x к Δx при $\Delta x \to 0$ называется частной производной функции по x, т.е.

$$u_x' = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y.z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

- **Полным дифференциалом** функции $u = f(x, y, z)$ называется сумма дифференциалов функции по каждому аргументу x, y, z, т.е.

$$du = u_x' \cdot dx + u_y' \cdot dy + u_z' \cdot dz$$

Интегральное исчисление

В дифференциальном исчислении рассматривались задачи, решение которых требовало отыскания производной данной функции. В ряде случаев приходится решать обратную задачу: по заданной производной отыскивать функцию, которую дифференцировали. Задачи такого рода решаются в разделе математического анализа, называемом *интегральным исчислением*.

Пусть на некотором промежутке *X* задана функция y=f(x).

Первообразная функции для функции y = f(x) называется такая функция F(x), что имеет место равенство

$$F`(x) = f(x)$$

Две первообразные одной функции отличаются друг от друга на постоянную.

Если F(x) – первообразная для функции f(x) то и функция F(x)+C, где C – произвольное число, так же первообразная для функции f(x), потому что (F(x) + C)` = f(x)

Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл функции y = f(x) – это совокупность всех первообразных функций F(x) + C для функции f(x).

Обозначается символом: $\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\,dx = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}$ где $\int$ – знак интеграла

f(x) – подынтегральная функция

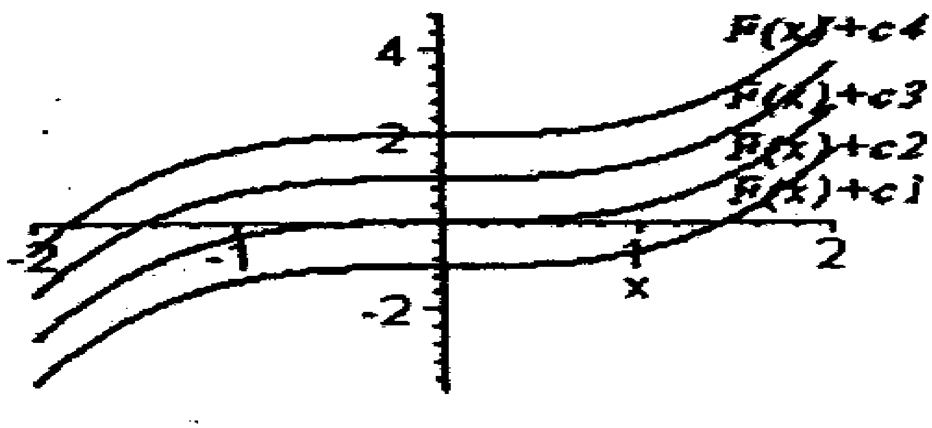
$\mathbf{f}(\mathbf{x})\,dx$ - подынтегральное выражение

C – постоянная интегрирования

X – переменная интегрирования

Интегрирование – это нахождение первообразной, по её производной. Это действие обратное дифференцированию.

Геометрический смысл неопределенного интеграла: это семейство кривых, сдвинутых вдоль оси Oy на величину C.



Основные свойства неопределенного интеграла

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$$

2. Интеграл суммы = сумме интегралов

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$$

3. Производная от неопределенного интеграла = подынтегральной функции

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

4. Дифференциалы от неопределенного интеграла = подынтегральному выражению

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

Основные способы интегрирования

1. *Метод непосредственного интегрирования*, который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведения подынтегрального выражения к табличному виду.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int \left(\frac{3}{x} + 2sinx\right)dx \quad \int \left(\frac{3}{x} + 2sinx\right)dx = 3\int \frac{dx}{x} + 2sinxdx = 3\ln|x| - 2cosx + C$$

2. *Метод подстановки или метод замены переменной.*

Самый эффективный прием сведения неопределенного интеграла к табличному виду.

Пример:

3x + 2 = t

dt = (t)`dx

dt = (3x + 2)`dx

dt = 3dx => dx = $\frac{dt}{3}$

$$\int \cos(3x+2)dx = \int cost\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int costdt = \frac{1}{3}\,sint + C = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

3. *Интегрирование по частям.*

Формула интегрирования по частям:

$$\int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$$

этот способ применяется, если интеграл упрощается.

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin\ dx}_{d\vartheta} = x\cdot(-\cos\ x) - \int -\cos\ xdx = -x\cos\ x + \sin\ x + C$$

Пример:

$u = x; \quad du = dx$

$d\vartheta = \sin\ xdx$

$\vartheta = (d\vartheta) = \int \sin\ xdx = -\cos\ x + C$

Определенный интеграл

Определенный интеграл – это общий предел всех интегральных сумм функции f(x) на отрезке [a,b]

Интегральная сумма: $S = \sum_{(i=1)}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$

где: ξ_i – произвольная точка существующего отрезка

Определенный интеграл обозначается:

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta xi$$, где:

f(x) – подынтегральная функция

x – переменная интегрирования

Теорема: Если F(x) – первообразная функции для непрерывной функции y = f(x), то есть F`(x)dx = f(x), то имеет место формула:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\,|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$,

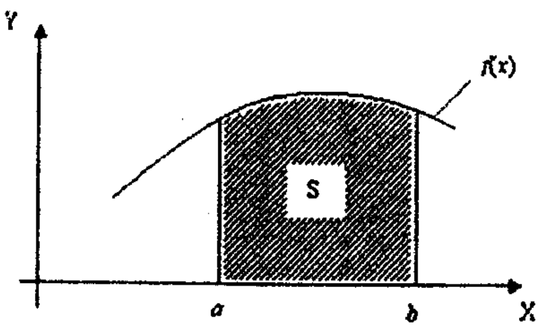
где $F(x)$ - первообразная, а $F(b) - F(a)$ - приращение первообразной.

Формула Ньютона – Лейбница – основная формула интегрального исчисления.

Определенный интеграл – это разность значений любой первообразной функции для f(x)при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла:

Определенный интеграл функции y=f(x) численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции y = f(x), осью Ox, прямыми x=a, x=b.



Свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен 0:
$$\int_b^a f(x)dx = 0$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций = алгебраической сумме их определенных интегралов

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

Пример. Вычислить неопределенный интеграл.
$$\int_2^3 3x^2\,dx$$

Применим формулу Ньютона – Лейбница и свойства определенного интеграла:

$$\int_2^3 3x^2dx = 3\int_2^3 x^2dx = 3\frac{x^3}{3}\int_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19$$

Таблица основных интегралов

Функция f (x)	*Первообразная F*
$\int dx$	X+C
$\int x^{\mu}\,dx$	$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$
$\int \frac{dx}{x}$	ln |x| +C
$\int e^x\,dx$	e^x+C
$\int cosxdx$	sin x+C
$\int \frac{dx}{cos^2x}$	tgx+C
$\int \frac{dx}{sin^2x}$	-ctgx+C