Лекция.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ.

1. Производная функции. Общее правило нахождения производных.
2. Общий смысл производной функции.
3. Таблица производных. Основные свойства производных.
4. Производная сложной функции.
5. Применение производной к исследованию функции на экстремум.
6. Дифференциал функции. Применение к решению задач.

Всё , что нас окружает, представляет собой материю. Основным свойством материи при решении задач в физике, биологии, химии возникает вопрос о нахождении скорости протекания процесса. Скорость реакции химической, скорость роста популяции и уже знакомая вам задача о скорости движения тела при уравнении движения $f = S(t)$

Где S- путь,t- время.

Все эти задачи можно решить методами высшей математики. Некоторых из них мы рассмотрим.

Пусть задана функция $y=f(x)$

X_0- фиксированная точка X- произвольная точка.

$y_o= f(x_o)$

$\Delta X = X - X_0$- приращение аргумента.

x_0 x Найдем соответствующие точки.

$y_0= f(x_0)$ $y= f(x)$

разность $y= y-y_0 = f(x)- f(x_0)$ – приращение к функции в точке x_0 .

$x= x_{0+} \Delta x \Rightarrow f(x) = f (x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$$y' = f' (x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x}$$

Производной функцией f(x) в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Процесс нахождения производной функции называется <u>дифференцированием.</u>

Для нахождения производной необходимо следовать общему правилу:

1. Дать приращение аргументу $x + \Delta x$,
2. Найти соответствующее приращение функции $y = (x + \Delta x) - f(x)$
3. Найти отношение $\frac{y}{X}$
4. Найти предел полученного выражения при $x \to 0$.

2.ОБЩИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ.

Производную $f'(X_0)$ можно трактовать как скорость изменения переменной У относительно переменной Х в точке X_0.

В практических условиях и функция и аргумент могут иметь достаточно разнообразную природу:

Физика: зависимость S (t) $y' = \upsilon$ (t).

Объем V(t)- скорость изменения объема

Р (t)- давление, Т (t)- температура; - скорость нагревания

Биология: p(t) – число особей в популяции в зависимости от времени t.

p(t) – скорость роста популяции.

Химия : x(t)- масса вещества в зависимости от времени t . x' (t)- скорость химической реакции и т.д.

3. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ.

Для нахождения производных нецелесообразно каждый раз пользоваться вышеизложенным правилом. Достаточно знать производные основных функций; а также основные формулы:

f(x)	$f'(x)$
y=c c_0- конст.	0
y= k× x	k
$y=x^2$	$\ell \times x^{\ell -1}$
ℓ n X	$\frac{1}{x}$
ℓ^{x}	ℓ^{x}
cos x	-sin x
sin x	cos x
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctg x	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

1) $(k\, f(x))' = k \times f'(x)$

2) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$

3) $(u \times \upsilon)' = u' \times \upsilon + u \times \upsilon'$

4) $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u' \times \upsilon + u \times \upsilon'}{\upsilon^2}$

4.ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ.

Пусть задана функция y= f(u), где u = φ(x) - такая функция называется сложной.

ПРАВИЛО: производная сложной функции y= f [φ(x)], которая может быть представлена в виде y= f(u), где u = φ(x), равна произведению производной функции y= f(u) по промежуточной переменной и (обозначается y' u) , в которую подставлено значение u = φ(x), и производной функции u = φ(x) по независимой переменной Х (обозначается $u'x$).

$$\boxed{y' = y'_u \times u'_x}$$

Пример. $y = \sin(x^2+3)$ $u = x^2+3$

$y = \sin u$ $\mathbf{y'_u = \cos u}$ $\mathbf{u'_x = 2x}$

$y' = \cos u \times 2x = \cos(x^2+3) \times 2x$

5.ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ НА ЭКСТРЕМУМ.

Условия возрастания и убывания функции:

1. Если производная функции $f'(x) > 0$ в каждой точке некоторого интервала J, то функция f(x) возрастает на J.
2. Если производная функции $f'(x) < 0$ в каждой точке некоторого интервала J, то функция f(x) убывает на J.
3.

Точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует называются **<u>критическими.</u>** Критическими точками область определения разбивается на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак.

Условия существования точек экстремумума:

а) Если при переходе через критическую точку $x=x_0$ $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-» , то $x=x_0$- точка максимума.

б) Если при переходе через критическую точку $x=x_0$ $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+» , то $x=x_0$- точка минимума.

<u>ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ НА ЭКСТРЕМУМ</u>.

1. Найти область определения функции y=f(x)
2. Найти производную функции $y' = f'(x)$
3. Решить уравнение $y' = 0$, найти критические точки функции. Отложить их на числовой оси.
4. Установить знак производной в интервалах слева и справа от каждой критической точки и записать промежутки возрастания и убывания функции.
5. Выяснить какие из критических точек являются точками max, а какие min.

3^0. $y = 2x^2 - x^4$ f(-1)=1

1) $D_y = R$ f(0)= 0

2) $y' = 4x - 4x^3$ f(1)=1

3) $y' = 0$

$4x - 4x^3 = 0$

$4x \times (1-x^2)=0$ $\times$ $\times$

$4x \times (1-x) \times (1+x)=0$

$x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=-1$

$f'(x)$ + - + -

$\times$ $\times$ $\times$

$f(x)$ -1 0 1

x = -1- точка max.

x = 1- точка max

x = 0- точка min.

6.ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.

Определение : Дифференциалом функции называется произведение производной функции на приращение аргумента $dy = y' dx$.

Приращение аргумента x считают равным dx- дифференциалу аргумента.

В задачах используется тот факт что:

Правило: Для вычисления дифференциала функции $y = f(x)$ надо знать уравнение функции, заданную точку x_0 , в котором вычисляется дифференциал и приращение аргумента $\Delta x = dx$ (или его произвольно выбрать).

4^0 Радиус металлического шара R =20 см вследствие увеличения на 0,01 см. На сколько увеличился объем шара.

Решение: $V = \frac{4}{3} \Pi R^3$ – функция V(R)

$R = 0{,}01$

V-?

$V \approx d V = V' (R) \times d R$

$V' (R) = 4\Pi R^2$

$V \approx 4\Pi \times 20^2 \times 0{,}01 = 16\Pi$ см^3.