## Интегральное исчисление

**В дифференциальном исчислении рассматривались задачи, решение которых требовало отыскания производной данной функции. В ряде случаев приходится решать обратную задачу: по заданной производной отыскивать функцию, которую дифференцировали. Задачи такого рода решаются в разделе математического анализа, называемом *интегральным исчислением*.**

**Пусть на некотором промежутке *X* задана функция y=f(x).**

Первообразная функции для функции y = f(x) называется такая функция F(x), что имеет место равенство

$$F`(x) = f(x)$$

Две первообразные одной функции отличаются друг от друга на постоянную.

Если F(x) – первообразная для функции f(x) то и функция F(x)+C, где C – произвольное число, так же первообразная для функции f(x), потому что (F(x) + C)` = f(x)

**Неопределенный интеграл**

Неопределенный интеграл функции y = f(x) – это совокупность всех первообразных функций F(x) + C для функции f(x).

Обозначается символом: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ где $\int$ – знак интеграла

f(x) – подынтегральная функция

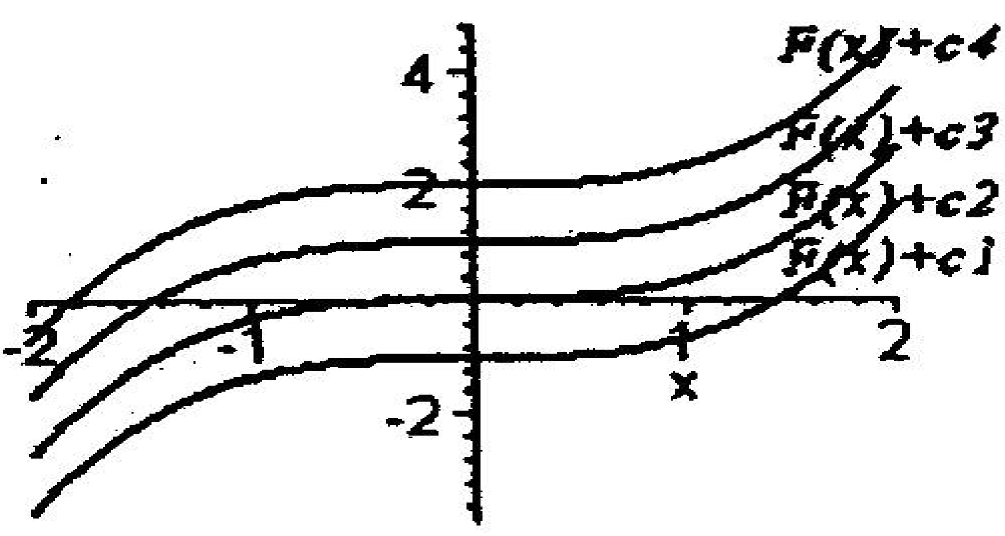
$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение

C – постоянная интегрирования

X – переменная интегрирования

*Интегрирование* – это нахождение первообразной, по её производной. Это действие обратное дифференцированию.

*Геометрический смысл неопределенного интеграла*: это семейство кривых, сдвинутых вдоль оси Оу на величину С.



*Основные свойства неопределенного интеграла*

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$$

2. Интеграл суммы = сумме интегралов

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)\, dx$$

3. Производная от неопределенного интеграла = подынтегральной функции

$$\int (f(x)dx)' = f(x)$$

4. Дифференциалы от неопределенного интеграла = подынтегральному выражению

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

*Основные способы интегрирования*

1. *Метод непосредственного интегрирования*, который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведения подынтегрального выражения к табличному виду.

*Пример:* Найти неопределенный интеграл

$$\int \left(\frac{3}{x} + 2sinx\right)dx$$

$$\int \left(\frac{3}{x} + 2sinx\right)dx = 3\int \frac{dx}{x} + 2sinxdx = 3\ln|x| - 2cosx + C$$

2. *Метод подстановки или метод замены переменной.*
Самый эффективный прием сведения неопределенного интеграла к табличному виду.
*Пример:*

$3x + 2 = t$
$dt = (t)'dx$
$dt = (3x + 2)'dx$
$dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

$$\int \cos(3x + 2)dx = \int cost\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int costdt = \frac{1}{3}sint + C = \frac{1}{3}\sin(3x + 2) + C$$

3. *Интегрирование по частям.*
Формула интегрирования по частям:

$$\int ud\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$$

этот способ применяется, если интеграл упрощается.

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin\ dx}_{d\vartheta} = x\cdot(-\cos\ x) - \int -\cos\ xdx = -x\cos\ x + \sin\ x + C$$

*Пример*:

$u = x;\quad du = dx$

$d\vartheta = \sin\ xdx$

$\vartheta = (d\vartheta) = \int \sin\ xdx = -\cos\ x + C$

## Определенный интеграл

*Определенный интеграл* – это общий предел всех интегральных сумм функции f(x) на отрезке [a,b]

*Интегральная сумма:* $S = \Sigma_{\downarrow}(i-1)^{\uparrow}n \equiv [f(\xi]_{i})\,\Delta x_i$

где: $\xi_i$ – произвольная точка существующего отрезка

Определенный интеграл обозначается:

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$ где:

f(x) – подынтегральная функция

x – переменная интегрирования

**Теорема**: Если F(x) – первообразная функции для непрерывной функции y = f(x), то есть F\`(x)dx = f(x), то имеет место формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a),$$

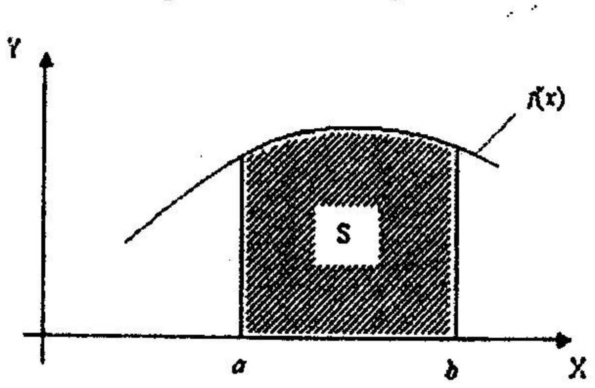
где $F(x)$ - первообразная, а $F(b) - F(a)$ - приращение первообразной.

*Формула Ньютона – Лейбница* – основная формула интегрального исчисления.

*Определенный интеграл* – это разность значений любой первообразной функции для f(x)при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

*Геометрический смысл определенного интеграла:*

**Определенный интеграл функции y=f(x) численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции y = f(x), осью Ox, прямыми x=a, x=b.**



*Свойства определенного интеграла:*

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен 0:
$$\int_b^a f(x)dx = 0$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций = алгебраической сумме их определенных интегралов

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

*Пример*. Вычислить неопределенный интеграл.
$$\int_2^3 3x^2\,dx$$

Применим формулу Ньютона – Лейбница и свойства определенного интеграла:

$$\int_2^3 3x^2dx = 3\int_2^3 x^2dx = 3\frac{x^3}{3}\int_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19$$

## *Таблица основных интегралов*

| *Функция f (x)* | *Первообразная F* |
|---|---|
| $\int dx$ | X+C |
| $\int x^{\mu}\,dx$ | $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$ |
| $\int \frac{dx}{x}$ | ln \|x\| +C |
| $\int e^x\,dx$ | $e^x$+C |
| $\int cosxdx$ | sin x+C |
| $\int \frac{dx}{cos^2x}$ | tgx+C |
| $\int \frac{dx}{sin^2x}$ | -ctgx+C |