Элементы теории вероятностей.

План.

1. События, виды событий.
2. Вероятность события
   а) Классическая вероятность события.
   б) Статистическая вероятность события.
3. Алгебра событий
   а) Сумма событий. Вероятность суммы событий.
   б) Произведение событий. Вероятность произведения событий.
4. Формула Байеса.

Теория вероятностей – это раздел математики, который изучает закономерности, присущие случайным событиям массового характера.

Методы теории вероятностей широко применяются при математической обработке результатов измерений, а также во многих задачах экономики, статистики, страхового дела, массового обслуживания.

Событие. Вероятность события.

Под **«событием»** в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Обозначение: A,B,C,D.

Приведем несколько примеров событий:

A – появление герба при бросании монеты;

B – появление трех орлов при трехкратном бросании монеты;

C – появление туза при вынимании карты из колоды;

D – соударение молекул газа в тепловом движении;

E – радиоактивный распад ядер.

Рассматривая вышеперечисленные события, мы видим, что каждое из них обладает какой-то степенью возможности: одни – большей, другие – меньшей, причем для некоторых из этих событий мы сразу же можем решить, какое из них более, а какое менее возможно.

Таким образом, каждое из таких событий обладает той или иной степенью возможности. Очевидно, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число мы назовем вероятностью события.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Сравнивая между собой различные события по степени их возможности, мы должны установить какую-то единицу измерения. В качестве такой единицы измерения естественно принять **вероятность достоверного**

события, т.е. такого события, которое в результате опыта непременно должно произойти.

Пример:

Выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости.

Если приписать достоверному событию вероятность, равную единице, то все другие события – возможные, но не достоверные – будут характеризоваться вероятностями, меньшими единицы, составляющими какую-то долю единицы.

Противоположностью по отношению к достоверному событию является **невозможное событие**, т.е. такое событие, которое в данном опыте не может произойти.

Пример:

Появление 12 очков при бросании одной игральной кости.

Естественно приписать невозможному событию вероятность, равную нулю.

Таким образом, установлены единица измерения вероятностей – вероятность достоверного события – и диапазон изменения вероятностей любых событий – числа от 0 до 1.

Виды событий.

Несколько событий в данном опыте образуют **полную группу событий**, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них.

Примеры событий, образующих полную группу:

1) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости

Несовместимые события.

События А и В называют <u>**несовместимыми,**</u> если при испытании появление одного из них исключает появление другого.

Пример:

1) появление 1, 3, 4 очков при однократном бросании игральной кости.

Совместимые события.

События называются **совместимыми** в данном опыте, если они могут произойти одновременно.

Пример:

Две кости – выброс двух «1»

Независимые события.

Независимыми называются события, если появление одного из них не зависит от появления другого.

Пример:

Вероятность появления орла при подбрасывании монеты не зависит от того, появилась ли решка при предыдущем испытании или нет.

Зависимые события.

Зависимыми называются события, если появление одного из них зависит от того, произошло другое в условиях данного опыта.

Пример:

В урне 10 шаров. Среди них 4 белых и 6 красных. Найти вероятность того, что 2-ой вынутый шар будет белым.

Вытащить 2-ой шар белым будет зависеть от того, какой шар мы вытащим первым.

Противоположными называются события, если появление одного из них, исключает появление другого.

Единственно возможное событие – если в условиях опыта произойдет только это событие.

1. При проведении испытаний мы не можем предсказать точно, произойдет или нет данное случайное событие, мы можем говорить лишь о **вероятности наступления события**.

Существуют 2 определения вероятности события:

Классическая вероятность события

Вероятность события А вычисляется как отношение числа благоприятных случаев к общему числу случаев:

$$P(A) = m/n,$$

где P(A) – вероятность события А; n – общее число случаев; m – число случаев, благоприятных событию А.

Вероятность событий лежит в пределах от 0 до 1.

$$0 < P(A) < 1$$

если P(A) = 0 – событие невозможное,

если P(A) = 1 – событие достоверное.

Пример:

В урне находится 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад вынимается один шар. Требуется найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение.

Обозначим А событие, состоящее в появлении белого шара общее число случаев n = 5; число случаев, благоприятных событию А, m = 2. Следовательно, P(A) = 2/5.

Классическая вероятность события – теоретическая вероятность. Классическое определение можно применять лишь, когда число элементарных исходов конечно.

Применение данной формулы ограничено.

Статистическая вероятность события.

Статистическое определение вероятности.

В случае, когда число испытаний n стремится к ∞, применяется статистическая вероятность (это предел отношения числа благоприятных исходов m, к общему числу всех элементарных событий n, при условии, что $n\to\infty$.)

$$P^*(A)=\lim m/n , \quad n\to\infty$$

3. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

1.Сумма 2-ух событий

Суммой 2-ух событий А и В является событие С, которое заключается в появлении либо события А, либо события В.

P(A+B) = P(A) + P(B), если **события несовместимые**

Пример:

В коробке находится 10 шаров: 2 белых, 1 красный, 6 черных. Какова вероятность того, что первый вынутый наугад шар окажется нечерным.

Решение.

n = 10; m1 = 2; m2 = 1; m3 = 6

P(A или B) = 2/10 + 1/10 = 3/10

Если **события совместимые**, то используется формула

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(A*B)

Пример:

В колоде 36 карт. Вытаскиваем 1 карту. Какова вероятность того, что карта окажется либо «дама», либо «черная масть».

Решение.

n = 36;

A – событие «черная масть»

B – событие «дама»

P(A+B) = ½ + 4/36 – 2/36 = 20/36

2. Произведение событий

Произведением 2-ух событий А и В является событие С, которое заключается в одновременном появлении событий А и В.

P(A и B) = P(A) * P(B) - независимые события

Пример:

Статистикой установлено, что вероятность рождения мальчиков составляет 0.515. какова вероятность появления в семье подряд двух мальчиков?

Решение.

P(A и B) = P(A) * P(B) = 0.515 * 0.515 = 0.265

Вероятность P(A и B) сложного события, состоящего из совпадения двух **зависимых простых событий** A и B (причем B зависит от A), равна произведению вероятности первого из них P(A) на условную вероятность второго P(B/A) в предположении, что первое событие произошло:

P(A и B) = P(A) * P(B/A)

P(B/A) – условная вероятность

Пример:

В коробке находятся 3 синих и два красных карандаша. Какова вероятность появления при извлечении наугад двух красных карандашей подряд?

Решение.

P(A) – вероятность появления красного карандаша при первом извлечении

P(A) = 2/5

P(B) – вероятность появления красного карандаша при втором извлечении

P(B/A) – условная вероятность события B (если событие A произошло, в коробке остались 1 красный и 3 синих карандаша)

P(B/A) = 1 / 4

Искомая вероятность P(A и B) = P(A) * P(B/A) = 2 / 5 * 1 / 4 = 1/10

Вероятность проявления **хотя бы одного** из событий независимых в совокупности, равна разности между 1 и произведением вероятностей противоположных событий, т.е.

P(A1+A2+A3+….A)=1– P(A1) P(A2) …..P(A)

2. Формула Байеса.

Позволяет определить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в результате которого появилось событие A; т.е. определяется **послеопытная вероятность.**

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P_{H_j}(A)}$$

A – событие

j – количество гипотез (предположений)

H – соответствующие гипотезы

P(H) – вероятность соответствующей гипотезы (доопытная вероятность

P (A) – вероятность события A при соответствующей гипотезе

P (H) – вероятность соответствующей гипотезы при условии, что событие произошло

Знаменатель в формуле – полная вероятность.

Пример:

В одной большой частной лечебнице 50% мужчин и 30 % женщин (согласно оценкам) страдают сердечной недостаточностью. В лечебнице женщин больше, чем мужчин в два раза.

У случайно выбранного пациента оказалось серьезное нарушение сердечной деятельности. Какова вероятность того, что этот пациент – мужчина.

Решение.

А – событие (пациент имеет нарушение сердечной деятельности)

Н1 – мужчина

Н2 – женщина

Р(Н1) = х– вероятность встретить мужчину

Р(Н2) = 2х – вероятность встретить женщину

Рн1(А) = 0.5 – вероятность заболевания мужчин при соответствующей гипотезе

Рн2(А) = 0.3 – вероятность заболевания женщин при соответствующей гипотезе