

Производная функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале x_0 и $x_0 + \Delta x$ произвольных значения аргумента из этого интервала.

❖ **Производной функции** $f(x)$ в точке x_0 называется \lim отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Процесс нахождения производной функции называется дифференцированием.

Физический смысл производной:

$S(t)$ - пройденный путь

$v = S'(t)$ - мгновенная скорость

Биологический смысл производной:

$P(t)$ - число особей в популяции.

$P'(t)$ - скорость роста популяции.

Химический смысл производной:

$x(t)$ - масса вещества в зависимости от времени t .

$x'(t)$ - скорость химической реакции.

Основные правила дифференцирования.

1. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Таблица производных:

y	C	kx	x^α	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$	$\arcsin x$	$\arctg x$	$\text{arcctg} x$
y'	0	k	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример 1:

1) $y' = (x^6 + \sin x)' = 6x^5 + \cos x$

2) $y' = \left(\frac{3x}{x^2+1}\right)' = \frac{3 \cdot (x^2+1) - 3x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2+1) - 6x^2}{(x^2+1)^2}$

Производная сложной функции.

Пусть задана функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ такая функция называется сложной (функцией от функции).

Правило: производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ равна произведению производной функции по промежуточной переменной $f'(u) = y_u'$, и производной функции по независимой переменной u_x' .

$y' = y_u' \cdot u_x'$

Пример 2:

$$y = \sin(\underbrace{x^2 + 3}_u) = \sin u$$

$$y' = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x$$

Задача:

Пусть популяция в момент t насчитывает $p(t) = 3000 + 100t^2$ особей:

Найти скорость роста популяции: а) В произвольный момент t .

б) В момент $t=1$ с

Решение:

Для нахождения скорости роста популяции находят производную функции:

$$p'(t) = 200t$$

Скорость роста популяции в произвольный момент $v = 200t$

Скорость роста популяции в момент $t=1$ с равна $p'(1) = 200$;

Ответ: $v = 200t$, $v = 200$ (особь/с).

Задачи для самостоятельного решения.

Найти производную функции:

$$1) y = \frac{3}{4}ax^4;$$

$$2) y = x^3 + 2x^2 + 8;$$

$$3) y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2};$$

$$4) y = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x};$$

$$5) y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2;$$

$$6) y = x^4 - \frac{1}{x};$$

$$7) y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{8};$$

$$8) y = \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 2;$$

$$9) y = (1 - 3x^2)(1 - x)^3;$$

$$10) y = (2x - 1)(x^2 - 1);$$

$$11) y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \cos x;$$

$$12) y = \frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{\sqrt{x}} + 5^x;$$

$$13) y = 2^x - \sqrt[5]{x};$$

$$14) y = \operatorname{tg} x + \ln x + \frac{x^4}{4};$$

$$15) y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x;$$

$$16) y = x - \sin x;$$

$$17) y = \ln x + \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$18) y = e^x \cos x;$$

$$19) y = \sin x \ln x;$$

$$20) y = \sin x \cos x;$$

$$21) y = x \ln x;$$

$$22) y = a^x \sqrt{x};$$

$$23) y = \sqrt{x} \ln x;$$

$$24) y = 3 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x;$$

$$25) y = 5a^x \sqrt[8]{x};$$

$$26) y = 4a^x \sqrt{x^3};$$

$$27) y = \frac{4}{x^2 + 1};$$

$$28) y = \frac{x^2}{2 - x};$$

$$29) y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4};$$

$$30) y = \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1};$$

$$31) y = \frac{2x^2 + 3}{4 + x^3};$$

$$32) y = \frac{x^3}{1 - 4x};$$

$$33) y = \frac{1 - x}{x - 1};$$

$$34) y = \frac{2x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x}};$$

$$35) y = \frac{x^2}{2 - x^2};$$

$$36) y = \frac{\sqrt{x^3}}{1 - 4x};$$

$$37) y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x^2};$$

$$38) y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1};$$

$$39) y = \frac{5x^4 - 2x^3 + 3x^2}{\sqrt[3]{x}};$$

$$40) y = \frac{e^x}{2x};$$

$$41) y = \frac{12 \cos x}{1 - \sin x};$$

$$42) y = \frac{e^x}{x^2};$$

$$43) y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\sin x};$$

$$44) y = \frac{x^3}{\ln x};$$

$$45) y = \frac{2x^2 - \ln x}{2};$$

$$46) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};$$

$$47) y = e^{3x};$$

$$48) y = \cos 2x;$$

$$49) y = \sin^2 x;$$

$$50) y = \sin x^2;$$

$$51) y = e^{x^2};$$

$$52) y = \ln(x^2 + 1);$$

$$53) y = a^{\sqrt{x+x}};$$

$$54) y = e^{\sin x};$$

$$55) y = \sqrt{\ln x};$$

$$56) y = 2 \operatorname{ctg} \frac{1}{x};$$

$$57) y = \ln(\ln x);$$

$$58) y = e^{-\frac{1}{x^2}};$$

$$59) y = \sin(\ln x);$$

$$60) y = \ln(\cos x);$$

$$61) y = (x^2 - 3)^5;$$

$$62) y = \sqrt[5]{(4x^2 - 3x + 1)^3}$$

1. Размер популяции насекомых в момент t задается величиной $P(t)=10000+9000(1+t)^3$.

Вычислите начальную популяцию $P(0)$ и скорость роста в момент $t=1$.

2. Зависимость между количеством (x) вещества, получаемого в некоторой химической реакции и временем (t) выражается уравнением $X = Ae^{-kt}$.

Определите скорость реакции в момент времени t .

3. Размер популяции бактерий в момент t (время выражено в часах) задается формулой $P(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Найдите скорость роста популяции когда:

а) $t=1$ час, б) $t=5$ час.

4. Смещение нагрузки в ответ на одиночное мышечное сокращение описывается уравнением $X = t \cdot \ell \frac{-t^2}{2}$. Найдите скорость и ускорение мышечного сокращения.

5. Формулу комплекса потенциалов, возникающих при возбуждении сетчатки глаза светом (электроретинограмма), можно выразить уравнением:

$u=r \cdot \sin(-3.05 \cdot 10^{-3} \cdot t^3 + 5.6 \cdot 10^{-2} \cdot t^2 + 1.59 \cdot 10^{-1} \cdot t)$, где r - постоянная, t -время.

Определить скорость изменения потенциала (u) в начальный момент времени $t=0$.

6. Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению $C=C_0 \cdot e^{-kt}$, где C - количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся к времени растворения t , k -постоянная скорости растворения. Определить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.

7. Колебания камертона происходят по закону: $X = 0.2 \cdot A \cdot \sin 800\pi t$.

Определить максимальные: скорость и ускорение конца ветви камертона.