## Неопределенный интеграл.

Нахождение неопределенного интеграла называют **интегрированием функции**.

- Совокупность первообразных $F(x)+C$ для данной функции называется **неопределенным интегралом.**

Обозначается: $\int f(x)dx = F(x)+C$

*$f(x)$ - называется подынтегральной функцией.*

*$f(x)dx$ - называется подынтегральной выражением.*

*$C$ - постоянная интегрирования.*

***Таблица основных интегралов:***

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$

3. $\int e^{x}dx = e^{x}+C$

4. $\int \sin xdx = -\cos x + C$

5. $\int \cos xdx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C_1$

**Простейшие способы интегрирования.**

а) непосредственное интегрирование заключается в использовании свойств неопределенного интеграла и приведение к табличному виду.

**Пример1:** $\int (2x^2+6x-7)dx = \int 2x^3dx + \int 6xdx - \int 7dx = 2\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2} - 7x + C$

б) интегрирование подстановкой (заменой переменных) заключается в переходе от данной переменной интегрирования к другой для упрощения подынтегральной функции.

$\int f(x)dx$ сделаем подстановку $x=\varphi(u)$ $f(x) = f(\varphi(u))$; $dx = \varphi'(u)\cdot du$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)\cdot du$$

**Пример 2:** $\int e^{3x+5}dx$; введем новую переменную $u=3x+5$, тогда

$$du = u'\cdot dx = 3dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int e^{3x+5}dx = \int e^{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int e^{4}du = \frac{1}{3}e^{4} + C = \frac{1}{3}e^{3x+5} + C$$

в) интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям:

$$\int ud\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$$

этот способ применяется, если интеграл упрощается.

**Пример 3:** $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin dx}_{d\vartheta} = x\cdot(-\cos x) - \int -\cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$

$u = x;\quad du = dx$

$d\vartheta = \sin xdx$

$\vartheta = (d\vartheta) = \int \sin xdx = -\cos x + C$

**Пример:**

Скорость роста популяции насекомых $\upsilon = t + t^2$. При t=0 число особей в популяции равно 10 000. Определить численность популяции спустя 3 дня.

*Дано:*

$\upsilon = t + t^2$

t=0, P=10 000

*Найти:*

P(3)=?

*Решение:*

$$P = \int \vartheta dt = \int (t + t^2) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$$

так как P(0)=10 000, то C=10 000

P(3)= $\frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} + 10000$ =10013,5≈10014 (особей)

*Ответ:* P(3)≈10014 (особей)

**Задачи для самостоятельного решения.**

**1** Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \sqrt{2x-3}\,\mathrm{dx}$;

2) $\int \cos 3x dx$;

3) $\int e^{2x+1} dx$;

4) $\int (e^x + e^{-x}) dx$;

5) $\int (x+1)^{3/2} dx$;

6) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

8) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+2}}$;

9) $\int \frac{x^3 dx}{(x^4-2)^3}$;

10) $\int x\sqrt{a^2+b^2x^2} dx$;

11) $\int \frac{2dx}{3-4x}$;

12) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$;

13) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$;

14) $\int x^2 (x^3+9)^3 dx$;

15) $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$;

16) $\int \frac{x^6 dx}{(x^7-2)^2}$;

17) $\int \frac{adx}{a-x}$;

18) $\int e^{x^2} x dx$;

19) $\int \frac{e^x+1}{e^x} dx$;

20) $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$;

21) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$;

22) $\int \frac{2e^x}{(2+e^x)^2} dx$;

23) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[x]{e}}$;

24) $\int e^{2x+3} dx$;

25) $\int \cos 3x dx$;

26) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

27) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

28) $\int (\sin \frac{x}{2} + \cos 2x) dx$;

29) $\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)}$;

30) $\int x^2 \sin 3x^3 dx$;

31) $\int \sin^2 x \cos x dx$;

32) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$;

33) $\int e^{\cos x} \sin x dx$;

34) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$;

**2** Скорость роста популяции насекомых $\upsilon = t + t^2$ (где t выражается в днях). При t=0 число особей в популяции равно 10 000. Определить численность популяции спустя: 1) 1 день; 2) 5 дней; 3) 10 дней.

**3**Скорость роста числа бактерий задается формулой
$\upsilon = 10^4 - 2 \cdot 10^3 t$. Составить уравнение роста числа бактерий x(t), если при t = 0 $x(0)=10^6$.

**4**Скорость растворения лекарственного вещества из таблетки $\upsilon = -c_0 k F e^{-kFt}$, где $c_0$ - концентрация лекарственного вещества при $t = 0, k$ - постоянная растворения, $F$ - площадь поверхности растворяемого вещества в единице объема. Составить уравнение растворения лекарственного вещества, если при $t = 0$ $c = c_s - c_0$, где $c_s$ - концентрация насыщения.

**5** Скорость движения кисти руки задана уравнением $\upsilon = \frac{1}{2} t^2 + 3$. Найти уравнение движение кисти, если за первые 6с было пройдено 40см.

## Определенный интеграл.

***Определенный интеграл, его смысл.***

Дана неотрицательная функция $y = f(x) > 0$

Фигура ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью ОХ называется *криволинейной трапецией.*

❖ Предел интегральной суммы называется определенным интегралом.

$\int_a^b f(x)dx = \underset{\lambda \to 0}{lin}\, \sigma$, $a,b$ - пределы интегрирования

Геометрический смысл:

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью ОХ.

*Формула Ньютона-Лейбница.*

Для вычисления определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ - первообразная, а $F(b) - F(a)$ - приращение первообразной.

**Пример 1:** $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

## Применение определенного интеграла.

1. Вычисление площади криволинейной трапеции

   $S = \int_a^b f(x)dx$

2. Определение работы переменного силы

   $A = \int_0^S f(S)dS$, работа переменной силы численно равна интегралу от силы, взятой по пути $S$.

1. Вычислить определённые интегралы:

| | |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 e^x dx$ | 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ |
| 2. $\int_{-2}^3 (2x^3 + x^2 - 5)dx$ | 5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ |
| 3. $\int_2^8 \frac{2+x}{x} dx$ | 6. $\int_1^2 x^3 \ln x dx$ |

**2.** Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой $y = \cos x$ и осью Ох, в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

**3.** Реакция организма на определенную дозу лекарственного препарата $f(t) = 3t^2-2t$ в момент времени t. Определить суммарную реакцию на данную дозу за первые 5 с.

**4.** Тело движется в некоторой среде прямолинейно по закону $S= t^2$. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости движения. Вычислить работу, произведенную силой сопротивления среды при передвижении тела от S=0 до S=a.

**5.** В момент времени t скорость изменения концентрации препарата с изотопным индикатором $\upsilon = e^{-t\ln 2}$. Найти концентрацию препарата в момент времени t.

**6.** Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:
1) $y=4-x^2$, y=0;
2) $y=3-2x-x^2$? y=0;
3) y=Inx, y=0, x=e
4) $y=x^2-2$, $y=6-x^2$
5) $y=\frac{2}{x}$, y=0, x=1, x=4;
6) $y=x^2$, $y=2-x^2$;
7) $y=x^2+4x$, y=x+4;
8) $y=6x-x^2$, y=0;
9) $y=x^3$, y=8, x=0;
10) $y=2^x$, y=2, x=0;
11) y=5x, y=0, x=2;
12) y=3x-1, y=0, x=2, x=4;
13) $y=x^3$, y=2x;
14) $y=4(1-x^3)$, y=0, x=0;
15) $y=x^2-x$, y=0, x=2, x=0;
16) $2x^2$, y=0, x=2, x=4;
17) $y=x^2-x$, y=0;
18) $y=2x-x^2$, y=x;
19) $y=\frac{x^2}{2}$, y=4-x;
20) $y=x^2$, $y=1-x^2$;
21) y=4x-5, y=0, x=-3, x=-2;
22) $y=2x^2+2x$, y=0, x=0, x=3;
23) $y=x^3$, x=2, x=3;
24) $y=x^2$, y=x;
25) y=sinx, y=0, x=0, $x=\pi$;
26) $y=e^{-x}$, y=0, x=1, x=2.

**7.** Найдите интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int$ x cosx dx;

2) $\int$ x cos3x dx;

3) $\int$ x Inx dx;

4) $\int xe^{x}$ dx;

5) $\int x^{2}$ sin2x dx;

6) $\int x^{3}$Inx dx;

7) $\int xe^{-x}$ dx;

8) $\int x^{2}e^{-2x}$ dx;

9) $\int\left(\frac{Inx}{x}\right)^{2}$ dx;

10) $\int$ xsinx dx;