

## Формула полной вероятности и формула Байеса.

**Определение:** Набор попарно несовместимых событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , сумма которых составляет достоверное событие, называется *полной группой событий*.

**Теорема 1** (формула полной вероятности).

Пусть события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  являются полной группой событий. Тогда для любого

события  $A$ : 
$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

### Формула Байеса.

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{j=1}^n P(H_j) \cdot P_{H_j}(A)}$$

где  $A$  - рассматриваемое событие

$H_i$  - гипотеза

$j$  - количество гипотез

$P(H_i)$  - вероятность  $i$ -той гипотезы (доопытная)

$P_{H_i}(A)$  - условная вероятность события  $A$  при соответствующей гипотезе

$P_A(H_i)$  - послеопытная вероятность  $i$ -той гипотезы

### Задача:

Команда на хорошем поле выигрывает с вероятностью  $2/3$ , а на плохом – с вероятностью  $1/2$ . Известно, что  $3/4$  игр проводится на хорошем поле. Какова вероятность выиграть в наудачу выбранном матче?

**Решение:** Введем события  $A = \{\text{выигрыш}\}$ ,

$H_1 = \{\text{плохое поле}\}$ ,

$H_2 = \{\text{хорошее поле}\}$ .

По условиям задачи:  $P(A/H_1) = 2/3$ ,  $P(A/H_2) = 1/2$ ,

$P(H_1) = 3/4$ ,  $P(H_2) = 1/4 \Rightarrow$

$P(A) = 2/3 * 3/4 + 1/2 * 1/4 = 5/8$ .

### Задача:

Установлено, что курящие мужчины в возрасте свыше 40 лет умирают от рака легких в 10 раз чаще, чем некурящие мужчины. В предположении, что 60% этой популяции курящие, какова вероятность того, что мужчина, умерший от рака легких, был курящим?

**Решение:** Пусть  $H_1$  - мужчина курящий,  $P(H_1) = 0.6$

$H_2$  - мужчина не курящий  $P(H_2) = 0.4$

$A$  - событие заключающееся в том, что мужчина, умер от рака лёгких.

$P_{H_1}(A) = 10P_{H_2}(A)$  - по условию задачи.

Рассчитывают вероятность того, что мужчина, умерший от рака лёгких, был курящий.

$$P_A(H_1) = \frac{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A)}{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A) + 0.4 \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{6}{6.4} = \frac{15}{16}$$

Рассчитывают вероятность того, что мужчина, умерший от рака лёгких, был некурящий.

$$P_A(H_2) = \frac{0.4 \cdot P_{H_2}(A)}{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A) + 0.4 \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{0.4}{6.4} = \frac{1}{16}$$

Проверка:  $15/16 + 1/16 = 1$ , следовательно задача решена верно.

**Ответ:**  $P_A(H_1) = 15/16$ ;  $P_A(H_2) = 1/16$

**10.14** Вероятность брака при изготовлении детали равна 0,04. Приемка деталей производится по следующей системе контроля: годная деталь принимается с вероятностью 0,98, а бракованная – с вероятностью 0,1. Найти вероятность приемки детали.

**10.15** Имеются три одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 30 белых и 20 чёрных шаров, во втором -15 белых и 15 чёрных шаров, в третьем – 5 белых и 15 чёрных шаров. Какова вероятность вытащить из случайно выбранного ящика чёрный шар.

**10.16** На автозавод поступили двигатели от трёх моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго-6 и от третьего-4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8 ; 0,7.

Какова вероятность того, что:

- а)установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;
- б)проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

**10.17** На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5,4 и 2%.

- а)Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.
- б)Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

**10.18** Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй - 35, третий - 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03 , у второго - 0,02 , у третьего - 0,01. Взятое наугад изделие

оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

**10.19** На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем  $\frac{3}{4}$  продукции с процентом брака 4%, вторая –  $\frac{1}{4}$  продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие:

а) Окажется бракованным;

б) Изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

**10.20** В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что а) сапоги, б) туфли?

**10.21** Лабораторное животное либо здорово (с вероятностью 0,9), либо нет. Если животное здорово, то оно может выполнить некоторое задание в 75% всех попыток. Если животное нездорово, то оно способно выполнить это задание лишь в 40% всех попыток. Допустим, что предпринимается попытка и животное справилось с заданием. Какова вероятность того, что животное здорово?

**10.22** Вакцина формирует иммунитет у животных против туберкулеза в 95% случаев. Вакцинировалось 30% животных. Вероятность заболеть туберкулезом у вакцинированного животного без иммунитета такая же, как у не вакцинированного. Какова вероятность того, что животное, заболевшее туберкулезом, было вакцинировано?

**10.23** В некоторой большой популяции число черноволосых и рыжих одинаково. Замечено, что у 30% людей с черными волосами глаза голубые, так же, как и у 50% людей с рыжими волосами. Из тех, у кого черные или рыжие волосы, случайно выбирают одного человека и оказывается, что у него голубые глаза. Какова вероятность того, что у этого человека черные волосы?

**10.24** В одной большой частной лечебнице согласно оценкам 50% мужчин и 30% женщин имеют серьезные нарушения сердечной деятельности. В этой лечебнице женщин вдвое больше, чем мужчин. У случайно выбранного пациента оказалось серьезное нарушение сердечной деятельности. Какова вероятность, что этот пациент мужчина?

**10.25** Установлено, что в среднем один из 700 детей рождается с лишней Y-хромосомой и что у таких детей крайне агрессивное поведение встречается в 20 раз чаще. Опираясь на эти данные представьте, что у мальчика крайне агрессивное поведение. Какова вероятность, что он имеет лишнюю Y-хромосому?

**10.26** Большая популяция людей разбита на 2 группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богата насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах 31% и 48%. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

**10.27** Предположим, что в некоторой большой популяции мужчин и женщин поровну. В этой популяции 5% мужчин и 0.25% женщин страдают дальтонизмом. Случайным образом выбирают одного дальтоника. Какова вероятность, что этот человек-мужчина?

**10.28** Краснуха может оказаться причиной серьёзных врождённых пороков развития у детей, если мать заболевает ею на ранних стадиях беременности. Вероятность пороков оценивается как 45%, 20% и 5%, если заболевание происходит соответственно на первом, втором и третьем месяцах беременности. Предположим, что вероятность заболеть краснухой одна и та же на любом месяце беременности и что ребёнок рождается с серьёзными пороками по причине краснухи. Какова вероятность, что мать заболела краснухой на первом месяце беременности?

**10.29** Некоторое заболевание, встречающееся у 5% населения, с трудом поддаётся диагностике. Один грубый тест на это заболевание даёт положительный результат в 60% случаев, когда пациент действительно болен, и в 30% случаев, когда у пациента нет этого заболевания. Пусть для конкретного пациента этот тест даёт положительный результат. Какова вероятность, что у него есть это заболевание?

**10.30** Два автомата производят одинаковые хирургические зажимы. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% зажимов отличного качества, а второй-84%. Наудачу взятый зажим оказался отличного качества. Найти вероятность того, что он произведён первым автоматом.