Лекция 2

Тема: Системы линейных уравнений. Методы решения СЛУ.

1. СЛУ. Основные понятия и определения.
2. Исследование СЛУ на совместность.
3. Решение СЛУ методом Гаусса.
4. Решение СЛУ методом Крамера.

1. СЛУ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Система линейных уравнений— это объединение из m линейных уравнений, каждое из которых содержит n переменных. Записывается это так:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_m = b_m \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots x_n$ - неизвестные

$a_{11}, a_{12}, \ldots a_{mn}$ - коэффициенты при неизвестных

$b_1, b_2, \ldots b_n$ - свободные члены

Если в системе ЛУ все свободные члены равны нулю, то СЛУ называется ***<u>однородной</u>***. Если хотя бы один из $b_m \neq 0$, то СЛУ называ*ется* ***<u>неоднородной.</u>***

<u>Решением СЛУ</u> называется упорядоченный набор действительных чисел $(k_1, k_2, \ldots k_n)$ таких, что при подстановке их вместо $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ уравнение, система обращается в верное тождество.

Если СЛУ имеет хотя бы одно решение, то она называется ***<u>совместной</u>***. Система, не имеющая ни одного решения называется ***<u>несовместной</u>***.

Совместная система называется ***<u>определенной</u>***, если она имеет единственное решение. Совместная система называется ***<u>неопределенной</u>***, если она имеет множество решений**.**

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или доказать, что это множество пусто. Таким образом возможны трислучая:

1. Система несовместна, т.е. множество всех решений пусто. Достаточно редкий случай, который легко обнаруживается независимо от того, каким методом решать систему.

2. Система совместна и определена, т.е. имеет ровно одно решение. Классический вариант, хорошо известный еще со школьной скамьи.

3.Система совместна и не определена, т.е. имеет бесконечно много решений. Это самый сложный вариант. Недостаточно указать, что «система имеет бесконечное множество решений» — надо описать, как устроено это множество.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУ НА СОВМЕСТНОСТЬ.

Рассмотрим систему из m уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований данную систему можно привести к ступенчатому виду.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1' \\ \qquad a_{22}'\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}'\cdot x_n = b_2' \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad a_{rn}'\cdot x_r = b_r' \end{cases}$$

r – число уравнений (может быть не равно m).

n – число неизвестных

Для исследования на совместность исходной системы линейных уравнений, необходимо исследовать полученную из нее ступенчатую систему линейных уравнений.

Критерии совместности СЛУ.

1. Для совместности СЛУ необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к ступенчатому виду ней не оказалось уравнений вида $\boldsymbol{0=b_t}$, где $b_t\neq 0$.
2. Система совместна и определена (1 решение) тогда и только тогда, когда в полученной из нее ступенчатой системе выполняется равенство $\boldsymbol{r=n}$.

Таким образом, после приведения системы к ступенчатому виду возможны следующие случаи:

а) <u>$\boldsymbol{r = n}$</u>, т.е. система приводится к треугольному виду и имеет единственное решение.

б) r < n, т.е. система приводится к виду трапеции и имеет бесчисленное множество решений, зависящих от ***(n-r)*** параметров.

в) в системе есть противоречивое равенство $\boldsymbol{0=b_t}$, где $b_t\neq 0$, *т.е.* система решений не имеет.

3. РЕШЕНИЕ СЛУ МЕТОДОМ ГАУССА.(метод последовательного исключения неизвестных).

Рассмотрим частный случай системы из трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

Суть данного метода заключается в том, что систему с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. Для удобства вычислений преобразования проводят над расширенной матрицей системы.

Алгоритм:

1.Записать расширенную матрицу, соответствующую системе.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

2. С помощью элементарных преобразований привести расширенную матрицу к ступенчатому виду (прямой ход Гаусса).
3. Сделать вывод о совместности системы линейных уравнений.
4. Записать систему линейных уравнений, соответствующую ступенчатой матрице.
5. Из этой системы последовательно найти все решения системы (обратный ход Гаусса).

Пример: Решить СЛУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 2\cdot x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$ Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) (-3)\,(-2) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

В полученной ступенчатой матрице число ненулевых строк $r=3$, число столбцов $n=3$. Матрица имеет треугольный вид, следовательно система имеет единственное решение. Запишем СЛУ, соответствующую ступенчатой матрице.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -7 \\ -5x_3 = -10 \end{cases}$$

Последовательно из третьего уравнения найдем $x_3=2$. Подставим во второе уравнение и найдем x_2.

$-x_2-3\cdot 10=-7 \quad \rightarrow \quad x_2=1$. Аналогично из первого уравнения находим x_1.

$x_1+1+2=6 \quad \rightarrow \quad x_1=3$.

Ответ: *(3;1;2)*

4. РЕШЕНИЕ СЛУ МЕТОДОМ КРАМЕРА.

Рассмотрим систему из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных этой системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ главный определитель системы.

Решения системы можно найти по ***<u>формулам Крамера</u>***:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}, \quad j = 1,2,\ldots n$$

Δ_j - ***побочный определитель*** , полученный из главного заменой *j-того* столбца столбцом свободных членов.

Возможны следующие случаи:

1) ***<u>$\Delta \neq 0$</u>***, система имеет единственное решение;

2) ***<u>$\Delta=0$</u>***

а) $\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_n=0$, система имеет бесчисленное множество решений. Их невозможно найти с помощью данного метода. Применяем метод Гаусса.

б) хотя бы один из $\Delta_j \neq 0$, система несовместна.

Рассмотрим частный случай, когда $n=3$.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

Запишем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Решение системы находим по формулам: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, где побочные определители равны:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример: Решить СЛУ методом Крамера.

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Найдем главный определитель системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *=6-2-3+3+4+3=5*. Найдем побочные определители системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 10$$

Найдем решения системы: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$.

Ответ: *(3;1;2)*

Задания для самостоятельной работы:

Решить системы линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$; 10) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$; 12) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} -x_1+x_2=1 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=-1 \end{cases}$; 14) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ 3x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2=-1 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=3 \\ 2x_1-x_2=4 \\ -x_1+x_2+x_3=-2 \end{cases}$; 16) $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=2 \\ x_1-4x_2-13x_3=14 \\ -3x_1+5x_2+4x_3=0 \end{cases}$.