1. Производная функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале x_0 и x-2 произвольных значения аргумента из этого интервала.

❖ <u>Производной функции</u> $f(x)$ <u>в точке</u> x_0 называется lim отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Процесс нахождения производной функции называется дифференцированием.

Физический смысл производной:

$S(t)$ - пройденный путь

$\upsilon = S'(t)$ - мгновенная скорость

Биологический смысл производной:

$P(t)$ - число особей в популяции.

$P'(t)$ - скорость роста популяции.

Химический смысл производной:

$x(t)$ - масса вещества в зависимости от времени t.

$x'(t)$ - скорость химической реакции.

Основные правила дифференцирования.

1.$(k' \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

2.$(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$

3.$(u \cdot \upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon$

4.$(\frac{u}{\upsilon})' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$

Таблица производных:

y	C	kx	x^α	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$	$arcsinx$	$arctgx$	$arcctgx$
y'	0	k	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример1:

1) $y' = (x^6 + \sin x)' = 6x^5 + \cos x$

2) $y' = (\frac{3x}{x^2+1})' = \frac{3 \cdot (x^2+1) - 3x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2+1) - 6x^2}{(x^2+1)^2}$

Производная сложной функции.

Пусть задана функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ такая функция называется <u>сложной</u> (функцией от функции).

<u>Правило</u>: производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ равна произведению производной функции по промежуточной переменной $f'(u) = y_u'$, и производной функции по независимой переменной u_x'.

$y' = y_u' \cdot u_x'$

Пример2:

$$y = \underbrace{\sin(x^2+3)}_{u} = \sin u$$

$$y' = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2+3)\cdot 2x$$

Задача:

Пусть популяция в момент t насчитывает **p(t) =3000+100**t^2 особей:

Найти скорость роста популяции: а) В произвольный момент t.

б) В момент t=1c

Решение:

Для нахождения скорости роста популяции находят производную функции:

p′(t)=200 t

Скорость роста популяции в произвольный момент v=200 t

Скорость роста популяции в момент t=1c равна p′(1)=200;

Ответ: v=200 t, v=200(особ/с).

Задачи для самостоятельного решения.

1.1 Найти производную функции:

1) y = $\frac{3}{4}ax^4$;

2) y = x^3+2x^2+8;

3) y = $\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$;

4) y = $2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$;

5) y = $-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$;

6) y = $x^4-\frac{1}{x}$;

7) y = $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{8}$;

8) y = $\frac{x^3}{3}-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+2$;

9) y = $(1-3x^2)(1-x)^3$;

10) y = $(2x-1)(x^2-1)$;

11) y = $\sqrt[4]{x^3}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\cos x$;

12) y = $\frac{3}{4}x^3-\frac{2}{\sqrt{x}}+5^x$;

13) y = $2^x-\sqrt[5]{x}$;

14) y = tg x + ln x + $\frac{x^4}{4}$;

15) y = tg x – ctg x;

16) y = x – sin x;

17) y = ln x + $\frac{2}{\sqrt{x}}$;

18) y = $e^{ч}\cos x$;

19) y = sin x lnx;

20) y = sinx cosx;

21) y = x lnx;

22) y = $a^{ч}\sqrt{x}$;

23) y = $\sqrt{x}\ln x$;

24) y = 3tgx ctgx;

25) y = $5a^x\sqrt[8]{x}$;

26) y = $4a^x\sqrt{x^3}$;

27) y = $\frac{4}{x^2+1}$;

28) y = $\frac{x^2}{2-x}$;

29) y = $\frac{x^2-4}{x^2+4}$;

30) y = $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

31) y = $\frac{2x^2+3}{4+x^3}$;

32) y = $\frac{x^3}{1-4x}$;

33) y = $\frac{1-x}{x-1}$;

34) y = $\frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$;

35) y = $\frac{x^2}{2-x^2}$;

36) y = $\frac{\sqrt{x^3}}{1-4x}$;

37) y = $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}$;

38) y = $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$;

39) y = $\dfrac{5x^4-2x^3+3x^2}{\sqrt[3]{x}}$;

40) y = $\dfrac{e^x}{2x}$;

41) y = $\dfrac{12\cos x}{1-\sin x}$;

42) y = $\dfrac{e^x}{x^2}$;

43) y = $\dfrac{tgx+ctgx}{\sin x}$;

44) y = $\dfrac{x^3}{\ln x}$;

45) y = $\dfrac{2x^2 = \ln x}{2}$;

46) y = $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

47) y = e^{3x};

48) y = cos2x;

49) y = $\sin^2 x$;

50) y = $\sin x^2$;

51) y = e^{x2};

52) y = $\ln(x^2+1)$;

53) y = $a^{\sqrt{x}+x}$;

54) y = $e^{\sin x}$;

55) y = $\sqrt{\ln x}$;

56) y = 2 ctg $\dfrac{1}{x}$;

57) y = ln(lnx);

58) y = $e^{-\frac{1}{x^2}}$;

59) y = sin(lnx);

60) y = ln(cosx);

61) y = $(x^2-3)^5$;

62) y = $\sqrt[5]{(4x^2-3x+1)^3}$

3.2 Размер популяции насекомых в момент t задается величиной
$P(t)=10000+9000(1+t)^3$.
Вычислите начальную популяцию P(0) и скорость роста в момент t=1.

3.3 Зависимость между количеством (x) вещества, получаемого в некоторой химической реакции и временем (t) выражается уравнением $X = A\ell^{-kt}$. Определите скорость реакции в момент времени t.

3.4 Размер популяции бактерий в момент t (время выражено в часах) задается формулой $P(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$ Найдите скорость роста популяции когда:
а) t=1час, б) t=5час.

3.5 Смещение нагрузки в ответ на одиночное мышечное сокращение описывается уравнением $X = t \cdot \ell^{\frac{-t^2}{2}}$ Найдите скорость и ускорение мышечного сокращения.

3.6 Формулу комплекса потенциалов, возникающих при возбуждении сетчатки глаза светом (электроретинограмма), можно выразить уравнением:
$u=r\cdot\sin(-3.05\cdot10^{-3}\cdot t^3+5.6\cdot10^{-2}\cdot t^2+1.59\cdot10^{-1}\cdot t)$, где r- постоянная, t-время. Определить скорость изменения потенциала (u) в начальный момент времени t=0.

3.7 Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению **$C=C_0\cdot e^{-\kappa t}$**, где **C**- количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся к времени растворения t , **к**-постоянная скорости растворения. Определить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.

3.8 Колебания камертона происходят по закону: **$X= 0.2\cdot A\cdot\sin 800\pi t$**.
Определить максимальные: скорость и ускорение конца ветви камертона.

2. Исследование функции на экстремум

Исследование функции с помощью производной основано на связи между поведением функции и свойствами её производной.

- Точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует называются <u>критическими</u>.

Критические точки разбивают область определения на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак.
Если при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак «+» на «-», то x_0 - точка max.
Если при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак «-» на «+», то x_0 - точка min.
Алгоритм исследования функции на экстремум:

4. Найти область определения функции D_f.
5. Найти производную функции y'.
6. y'=0, найти критическую точку функции.
7. Установить знак производной в каждом интервале.
8. Определить точки max и min.

Пример:

$$y = 2x^2 - x^4$$
$$1) D_f = k$$
$$2) y' = 4x - 4x^3$$
$$3) y' = 0$$
$$4x - 4x^3 = 0$$
$$4x(1 - x^2) = 0$$
$$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$$

Начертив прямую области определения, определяют знаки производной в каждом интервале и делают вывод. X=±1 –т.max, X=0 –т.min

Задача:

Исследовать на наибольшее и наименьшее значения производственную функцию, отражающую зависимость урожая кукурузы (у) (ц/га) от количества азотного удобрения (х) (кг/га). Функция имеет вид: $\mathbf{y=-0{,}0021x^2+0{,}936x+49{,}84}$

Решение:

1. Областью определения данной функции является интервал$[0,\infty)$.
2. Графиком функции является парабола, обращённая ветвями вниз. Поэтому функция имеет один экстремум-максимум.
3. Находят производную от данной функции:

$$y'=-0{,}0042x+0{,}936$$

4. Приравнивают производную к нулю и находят корни уравнения:
0,0042x+0,936=0   x=222,86- точка максимума.

5. Рассчитывают максимальную урожайность кукурузы:
$y(222{,}86)=-0{,}0021(222{,}86)^2+0{,}936\cdot 222{,}86+49{,}84\approx 154$(ц/га).

Ответ: При количестве азотного удобрения 222,86(кг/га) урожай кукурузы (ц/га) максимален.

Задачи для самостоятельного решения.

2.1 Определить интервалы убывания и возрастания функции:

1. $y = x^3+3x^2+3x+1$	7. $y = x-e^x$
2. $y = 3x-3x^2$	8. $y = x\cdot\ln x$
3. $y = x^2+x-1$	9. $y = 2x^2-x^4/4$
4. $y = x^2-5x+6$	10. $y = x^3/6-x^2$
5. $y = x-e^x$	
6. $y = x\cdot\ln x$	

2.2 Исследовать функцию на экстремум:

1. $y = x^2+x+1$	6. $y = 1+x^2-x^4/2$
2. $y = 2x^3-6x2-18x+7$	7. $y = 3x-x^3$
3. $y = x^3/3-2x^2+3x-1$	8. $y = x^3-6x^2+9x-4$
4. $y = 2x^2-x^4$	9. $y = \dfrac{X}{X^2+1}$
5. $y = x^4-8x^2+8x$	

2.3. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает согласно уравнению $P(t) = 1000 + \dfrac{1000t}{100+t^2}$, где t выражается в часах. Найти максимальный размер этой популяции.

2.4 Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела и других физиологических показателей. Степень реакции зависит от дозы лекарства. Предположим, что (х) обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции (у) описывается функцией **$y=x^2(5-x)$**. При каком значении х реакция максимальна?

2.5 Зависимость между урожаем озимой пшеницы (у) (ц./га.) и нормой посева семян х (млн. зер./га.) выражается функцией **y=5,6+8.1x-0.7x .** Найдите оптимальную норму посева семян для того, чтобы получить максимальный урожай.

2.6 Скорость роста (у) популяции (х) задана формулой **y=0.001x(100-x).** При каком размере популяции эта скорость максимальна? Какова равновесная популяция, т.е. популяция для которой скорость роста равна нулю?

3 Дифференциал функции.

Задача:

Закон накопления сухой биомассы у винограда определяется уравнением **$Y=0.3X-0.0004X^2$** где X-число дней от распускания почек, Y-накопление биомассы в кг на 1 куст. Как изменится сухая биомасса куста при изменении X от 50 до 60 дней?

Дано:

$Y=0.3X-0.0004X^2$

$X_1=50$

$X_2=60$

Δy-?

Решение:
Изменение биомассы-это приращение биомассы, его заменяют дифференциалом: $\Delta y \approx dy = (0.3X - 0.0004X^2)' dx = (0.3 - 0.0008X)dx$.
Находят $dx = x_2 - x_1$ $dx = 60 - 50 = 10$
Находят $\Delta y = (0.3 - 0.0008 \cdot 50) \cdot 10 = 2.6$(кг)
Ответ: $\Delta y = 2.6$ (кг)

Задачи для самостоятельного решения.

3.1 Опытным путем установлено, что массу животного при установившемся режиме кормления можно считать функцией времени откорма t: $\mathbf{P=5t^2}$ Найти привес животного за 10 дней, начиная с 64-го дня кормления.

3.2 Зависимость между возрастом коров (x) и суточным удоем (y)л выражается функцией: $\mathbf{y = -9.53 + 6.86x - 0.49x^2}$. Как изменится среднесуточный удой коров, если возраст их увеличится с 3 до 5 лет?

3.3 Урожай сахарной свеклы (т/га) в зависимости от количества вносимых минеральных удобрений (ц/га) выражается: $\mathbf{y = 5.4x - 2.9}$. Подсчитайте приближенно, как изменится урожай сахарной свеклы, если количество вносимых удобрений увеличить с 4 до 6 ц/га.