Элементы теории множеств

I . Понятие множества.

Теория множеств появилась на свет 7 декабря 1873 года. Основатель этой теории немецкий математик и философ Георг Кантор (1845–1918). Его заинтересовал вопрос, каких чисел больше – натуральных или действительных? В одном из писем адресованных к своему приятелю Рихарду Дедекинду, Кантор писал, что ему удалось доказать посредством множеств, что действительных чисел больше, чем натуральных. День, которым было датировано это письмо, математики считают днем рождения теории множеств.

Что же все-таки представляют собой множества? "Множество есть многое, мыслимое как единое" (Г. Кантор). Понятие множества настолько простое, принятое в повседневной жизни и перенесенное в математику, что оно не определяется, но может быть пояснено с помощью примеров: множество городов, множество государств, множество учащихся. Предметы, объекты, образующие данное множество, называются его *элементами*. В математике рассматривают только те множества, которые обладают четко определенными свойствами, состоят из элементов, имеющих некоторые общие свойства.

Есть несколько способов обозначения множеств. Можно переписать все элементы множества в фигурные скобки $\{a, b, c, d, e\}$.

При этом мы наглядно видим, из каких элементов состоит множество. Но эта запись неудобна при описании множеств с большим числом элементов или множеств, число элементов которых невозможно перечислить полностью, то есть – бесконечных множеств. Например, невозможно записать все элементы множества чисел, которые делятся на 10. В этом случае множество записывается так:

$\{x \mid x - \text{делятся на } 10\}$.

Для удобства работы с множествами, их обозначают заглавной буквой.

$A = \{x \mid x - \text{число меньше, чем } 100\}$.

Если во множестве нет ни одного элемента, то оно называется *пустым множеством*. Например, множество крылатых китов, есть пустое множество.

Сами множества так же могут быть элементами множества

$\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{m, n\}\}$

Пусть задано множество $B = \{3, 6, 9\}$. Элемент 3 принадлежит множеству *B*, это обозначается так $3 \in B$. Элемент 8 не принадлежит множеству *B*, это обозначается $8 \notin B$.

II. Равенство множеств.

Очень важной особенностью множества является то, что в нем нет одинаковых элементов, вернее, что все они отличны друг от друга. Это значит, можно записать сколь угодно одинаковых элементов, но выступать они будут как один. То есть множество не может содержать одни и те же элементы в нескольких вариантах. Предположим мы записали множество $\{7, 9, 7, 11, 7\}$. В этом множестве элемент 7 повторяется несколько раз, но мы его будем рассматривать как один. Поэтому наше множество будет $\{7, 9, 11\}$.

Рассмотрим два множества $\{a, b, c\}$ и $\{b, a, c\}$. Эти множества состоят из одних и тех же элементов, хотя они и записаны в разном порядке. Такие множества называются равными. Итак, два *множества равны*, если содержат одни и те же элементы.

III. Подмножество.

Рассмотрим множество дней в неделе. Запишем его $S = \{понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье\}$.

Теперь отберем только рабочие дни. Они составляют множество $R = \{понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота\}$.

Посмотрим, в каком соотношении находится множество *R*, учитывая его элементы, по отношению к множеству *S*. Можно заметить, что все элементы множества *R* входят в множество *S*. Значит, множество *R* является частью множества *S* или *подмножеством*. Следовательно, если *каждый* элемент какого-то множества *R* является в то же время элементом множества *S*, то можно сказать, что *R* – *подмножество* множества *S*. Обозначается это так $R \subset S$. Само множество *S* так же является своим подмножеством. Очень важно отметить, что пустое множество является подмножеством каждого множества. Значит, если нам нужно выписать все подмножества множества $\{a, b, c\}$, то мы запишем: $\{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{b, c\}; \{a, c\}; \{a, b, c\}$.

IV. Пересечение множеств.

Рассмотрим два множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Составим новое множество *C*, в которое запишем общие элементы множеств *A* и *B*. Общими у них являются элементы 5 и 6, значит $C = \{5, 6\}$. Множество *C* называется *пересечением* множеств *A* и *B*. Обозначается так: $A \cap B = C$

Пересечением множеств A и B называется новое множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B.

Пусть *P* – множество учащихся математических классов нашей школы, *K* – множество учащихся пятых классов, тогда $P \cap K$ (пересечением множеств *P* и *K*) будет множество учащихся пятого математического класса.

У множеств $M = \{2, 4, 6\}$ и $H = \{1, 3, 5\}$ нет ни одного общего элемента, следовательно, их пересечение есть пустое множество $M \cap H =$ О

V. Объединение множеств.

Возьмем те же два множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Составим теперь множество *E* следующим образом – запишем в него элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A* и *B*. Получим множество $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Множество *E* называют объединением множеств *A* и *B*. Обозначается $A \bigcup B = E$

Объединением множеств А и В называется новое множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.

Упражнения

VI. Разность множеств.

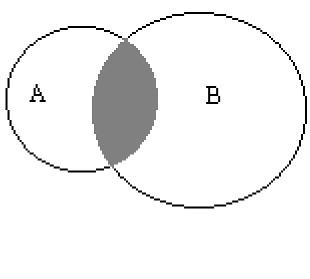
Возьмем уже знакомые множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Составим новое множество *Ф* в которое запишем элементы множества *A*, не входящие во множество *B*. $\Phi = \{1, 2, 3, 4\}$. Множество *Ф* называется разностью множеств *A* и *B*. Обозначается $A \setminus B = \Phi$.

Разностью двух множеств А и В называют такое множество, в которое входят все элементы из множества А, не принадлежащие множеству В.

Важно заметить, что при вычитании множеств нельзя менять их местами. При нахождении разности $B \setminus A$ в новое множество мы запишем элементы множества *B*, которые не принадлежат множеству *A*. Значит $B \setminus A = \{7, 8, 9\}$.

VII. Круги Эйлера.

Один из величайших математиков петербургской академии Леонард Эйлер (1707–1783) за свою долгую жизнь написал более 850 научных работ. В одной из них появились круги, которые “очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления”. Эти круги и назвали *кругами Эйлера*. С помощью этих кругов удобно геометрически иллюстрировать операции над множествами. На рисунках представлены иллюстрации действий над множествами. Можно рисовать не только круги, но и овалы, прямоугольники и другие геометрические фигуры.



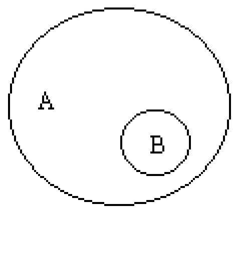
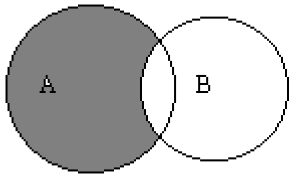


Рис. 1 $B \subset A$ Рис.2 $A \bigcap B$



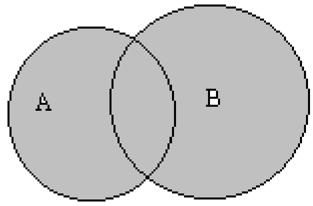


Рис. 3 $A \cup B$ Рис.4 $A \setminus B$

С помощью кругов Эйлера можно решать задачи. Рассмотрим одну из них.

Задача. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 – в биологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

Решение. Изобразим эти кружки (рис. 5). Большой круг будет изображать учащихся класса. В этот круг поместим два поменьше. Один обозначим буквой *М* и он будет изображать математиков класса. Другой круг обозначим *Б* – биологи класса. Очевидно, в общей части кругов, обозначенной *МБ*, окажутся те самые биологи – математики, которые нас интересуют. Теперь посчитаем: Всего внутри большого круга 35 ребят, внутри двух меньших $35-10=25$ ребят. Внутри “математического” круга *М* находятся 20 ребят, значит, в той части “биологического” круга, которая расположена вне круга *М*, находятся $25-20=5$ биологов, не посещающих математический кружок. Остальные биологи, их $11-5=6$ человек, находятся в общей части кругов *МБ*. Таким образом, 6 биологов увлекаются математикой.

Ответ. 6 биологов увлекаются математикой.

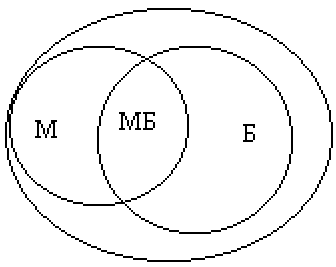


Рис. 5