Математическая логика

Высказывание. Виды высказываний.

Основным (неопределяемым) понятием математической логики является понятие «простого высказывания».

Под **высказыванием** обычно понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо. И при этом мы можем сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

Приведем примеры высказываний.
1) Санкт –Петербург стоит на Неве.
2) Париж — столица Англии.
3) Карась не рыба.
4) Число 6 делится на 2 и на 3.
5) Если юноша окончил среднюю школу, то он получает аттестат зрелости.

Высказывания 1), 4), 5) истинны, а высказывания 2) и 3) ложны.

Очевидно, предложение «Да здравствуют наши спортсмены!» не является высказыванием.

Различают **два вида высказываний.**

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть **простым или элементарным.**

Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1) и 2).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если .... то ...», «тогда и только тогда», принято **называть сложными или составными.**

Элементарные высказывания обозначаются малыми буквами латинского алфавита: x, y, z, ..., a, b, c, ...; истинное значение высказывания цифрой 1, а ложное значение - цифрой 0.

Логические операции над высказываниями.

Отрицание.

Отрицанием высказывания **a** называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание **a** ложно, и ложным, если высказывание **a** истинно. Отрицание высказывания **a** обозначается **ā** и читается «**не a**» или «неверно, что **a**». Логические значения высказывания можно описать с помощью таблицы.

a	ā
И	Л
Л	И

Буквы «и» и «л» - сокращение слов «истина» и «ложь». Эти слова в логике называют **значениями истинности**. Таблицы такого вида принято называть **таблицами истинности.**

Конъюнкция.

Конъюнкцией (логическим умножением) двух высказываний **a** и **b** называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания **a** и **b** истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний **a** и **b** обозначается символом $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, читается «**a** и **b**». Высказывания **a** и **b** называются членами конъюнкции.
Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

a	**b**	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Пример. Высказывание «Число 2 четное и простое» сложное. Оно состоит из двух высказываний: **a** (Число 2 четное) и **b** (Число 2 простое), связанных символом «и». Оба эти высказывания истинны. Истинным является и сложное высказывание, которое есть конъюнкция **a** и **b.** А высказывание «Число 12 четное и простое» является ложным, т.к. первое высказывание истинно, а второе – ложно. Поэтому ложным является и их конъюнкция.

Дизъюнкция

Дизъюнкцией (логическим сложением) двух высказываний **a** и **b** называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний **a, b** истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний **a, b** обозначается символом «$\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$», читается «**a** или **b**». Высказывания **a, b** называются членами дизъюнкции.

Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

a	**b**	$\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример. Сложное высказывание «Завтра на уроке математики будет контрольная или самостоятельная работа» есть дизъюнкция высказываний «Завтра на уроке математики будет контрольная работа» и «Завтра на уроке математики будет самостоятельная работа».

Импликация.

Импликацией двух высказываний **a** и **b** называется новое высказывание, которое считается ложным, если **a** истинно, а **b** – ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний **a, b** обозначается символом $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$, читается «если **a**, то **b**» или «из **a** следует **b**». Высказывание **a** называют условием или посылкой, высказывание **b** - следствием или заключением, высказывание $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ следованием или импликацией.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

a	**b**	**a→b**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример. Рассмотрим два высказывания **a**: (Сейчас хорошая погода) и **b:** (Я пойду гулять). Импликация **a→b** в этом случае означает: «Если сейчас хорошая погода, то я пойду гулять» кода высказывания **a и b** истинны, то истинно и высказывание **a→b.** Но также ясно, что если сейчас плохая погода и я пойду гулять, либо откажусь от прогулки, то меня никак нельзя назвать лжецом (никакого противоречия не возникает). Поэтому импликация **a→b** и в этих случаях истинна.

Эквивалентность.
Эквивалентностью двух высказываний **a** и **b** называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания **a,b** либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквивалентность высказываний **a,b** обозначается символом x □ y , читается «для того, чтобы **a**, необходимо и достаточно, чтобы **b**» или «**a** тогда и только тогда, когда **b**», или «для того, чтобы **a**, необходимо и достаточно, чтобы **b**».
Логические значения операции эквивалентности описываются следующей таблицей истинности:

a	**b**	**a↔b**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Например, эквивалентность: «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда SP = SQ » является истинной, так как высказывания «Треугольник .SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» и «В треугольнике SPQ с вершиной S и основанием PQ SP = SQ » либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное число теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности и доказав истинность самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

Алгебра логики.

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок *выполнения операций указывается скобками. Например, из трех высказываний x, y, z можно построить высказывания.*

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности, называется **формулой алгебры логики**. Пользуясь таблицами истинности операций, можно составить таблицы истинности различных выражений.

Пример. Составить таблицу истинности выражения **$\bar{a} \wedge b$.**

Решение. В таблице все возможные сочетания значений **a** и **b** и воспользуемся таблицами истинности отрицания и конъюнкции. Получим.

a	**b**	**$\bar{a}$**	**$\bar{a} \wedge b$**
И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л
Л	И	И	И
Л	Л	И	Л

Пример. Составить таблицу истинности выражения **$\bar{a} \vee b$.**

Решение.

a	**b**	**$\bar{a}$**	**$\bar{a} \vee b$.**
И	И	Л	И
И	Л	Л	Л
Л	И	И	И
Л	Л	И	И